Fen-Edebiyat Fakültesi	**ARA SINAV KAĞIDI**	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 16 Kasım 2026	

Süre 75 dk.

$$u(t,x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,n!}\frac{\partial^{m+n}u}{\partial t^m\partial x^n}(0,0)\,t^m x^n$$

1. (25 puan) $x(y^2-z^2)\,z_x+y(z^2-x^2)\,z_y=z(x^2-y^2)$ denkleminin genel çözümünü bulun.

Çözüm: Çarpanlar (x,y,z): $x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)=0$, yani

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0 \implies u_1=x^2+y^2+z^2=c_1.$$

Çarpanlar $(1/x,1/y,1/z)$: $(y^2-z^2)+(z^2-x^2)+(x^2-y^2)=0$, yani

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0 \implies u_2=xyz=c_2.$$

Cevap:

$$F(x^2+y^2+z^2,\ xyz)=0.$$

2. (25 puan) $y z_x - x z_y = 2xyz$ kısmi türevli denkleminin $y = 0$, $z = 1$, $x > 0$ başlangıç eğrisinden geçen çözümünün (a) tek olduğunu gösterin, (b) çözümünü bulun.

Çözüm: (a) $P = y$, $Q = -x$, $R = 2xyz$, $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 1$, $t > 0$ alalım.

$$P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt} = 0 \cdot 0 - (-t) \cdot 1 = t \neq 0.$$

(b)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{2xyz}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Longrightarrow u_1 = x^2 + y^2 = c_1, \qquad \frac{dx}{y} = \frac{dz}{2xyz} \Longrightarrow \frac{dz}{z} = 2x\,dx \Longrightarrow u_2 = z e^{-x^2} = c_2.$$

Eğri üzerinde $u_1 = t^2$, $u_2 = e^{-t^2}$, yani $u_2 = e^{-u_1}$:

$$z e^{-x^2} = e^{-x^2-y^2}.$$

Cevap:

$$z = e^{-y^2}.$$

3. (25 puan) $u_x + y\,u_y = u + 1$ denklemi veriliyor. (a) Denklemi bir adi diferansiyel denkleme indiren $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ koordinat dönüşümünü bulun. (b) $u(0,y) = y^2$ koşulunu sağlayan çözümü bulun.

Çözüm: (a)

$$\frac{dy}{dx} = y \implies y\,e^{-x} = c \implies \xi = y\,e^{-x}, \quad \eta = x \implies u_\eta = u + 1.$$

(b)

$$\left(e^{-\eta}(u+1)\right)_\eta = 0 \implies u = -1 + e^{\eta} f(\xi) = -1 + e^{x} f(y\,e^{-x}).$$

$$u(0,y) = -1 + f(y) = y^2 \implies f(w) = w^2 + 1.$$

Cevap:

$$u = -1 + e^{x} + y^2 e^{-x}.$$

4. (25 puan) $u_t = u\,u_x + x$, $u(0,x) = 1 + x^2$ Cauchy probleminin orijin etrafında tanımlı analitik çözümünün seri açılımının derecesi ikiden küçük veya eşit terimlerini bulun.

Çözüm:

$$u(0,x) = 1 + x^2, \qquad u_x(0,x) = 2x, \qquad u_{xx}(0,x) = 2$$

$$u(0,0) = 1, \qquad u_x(0,0) = 0, \qquad u_{xx}(0,0) = 2$$

$$u_t = u\,u_x + x \implies u_t(0,0) = 0$$

$$u_{tx} = u_x^2 + u\,u_{xx} + 1 \implies u_{tx}(0,0) = 0 + 2 + 1 = 3$$

$$u_{tt} = u_t\,u_x + u\,u_{xt} \implies u_{tt}(0,0) = 0 + 1 \cdot 3 = 3$$

Cevap:

$$u(t,x) = 1 + x^2 + 3tx + \frac{3}{2}\,t^2 + \cdots$$